IKKINCHI TARTIBLI SINGULYAR DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALANING CHEBISHEV POLINOMLARI BILAN YECHIMINI SPEKTRAL USULDA O ‘RGANISH

Uzakbaev Jangeldi Sabitovich
TATUNF 2-kurs *magistranti*
zhanuzakbaev@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada ikkinchi tartibli singulyar differensial tenglama uchun chegaraviy masalaning Chebishev polinomlari yordamida spektral usulda yechimini topish va tahlil qilish masalasi koʻrib chiqilgan.

Kalit so‘zlar: singulyar differensial tenglama, Chebishev polinomlari, spektral usul, chegaraviy masala, ortogonal polinomlar, rekursiv munosabatlar.

ИЗУЧЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

Аннотация: В данной статье рассматривается задача нахождения и анализа решения краевой задачи для сингулярного дифференциального уравнения второго порядка с использованием спектрального метода на основе полиномов Чебышева.

Ключевые слова: сингулярное дифференциальное уравнение, полиномы Чебышева, спектральный метод, краевая задача, ортогональные полиномы, рекурсивные соотношения.

STUDY OF THE SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SECOND-ORDER SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATION USING CHEBYSHEV POLYNOMIALS BY THE SPECTRAL METHOD

Abstract: This paper examines the problem of finding and analyzing the solution of a boundary value problem for a second-order singular differential equation using the spectral method based on Chebyshev polynomials.

Keywords: singular differential equation, Chebyshev polynomials, spectral method, boundary value problem, orthogonal polynomials, recursive relations.

Kirish. Singulyar differensial tenglamalarni yechish usullari zamonaviy matematikaliq modellashtirishda katta ahamiyatga ega, chunki ular real dunyo muammolarida, masalan, tebranish jarayonlari yoki issiqlik oʻtkazuvchanligini modellashtirishda uchraydi. Chebishev polinomlari yordamida spektral usulni qoʻllash yechimning aniqligini oshiradi va hisoblash xarajatlarini kamaytiradi.

Ikkinchi tartibli singulyar differensial tenglamalar matematika va fizikaning koʻp sohalarda, masalan, approksimatsiya nazariyasi, mexanika va signalni qayta ishlashda muhim rol oʻynaydi. Ushbu tenglamalarni yechishda Chebishev polinomlari ortogonal xususiyatlari tufayli samarali vosita sifatida qoʻllaniladi. Mazkur ishda *[-1, 1]* intervalida chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan ikkinchi tartibli differensial tenglamaning spektral usul yordamida yechimini oʻrganish maqsad qilingan[1].

Masalaning qoʻyilishi. Chebishev polinomlari bilan bogʻliq boʻlgan differensial tenglamani koʻrib chiqaylik:

$$(1-x2)y'' - xy' + \lambda y = 0, \qquad -1 < x < 1,$$

bu yerda $y = y(x)$ — izlanayotgan funksiya, $y'' = \frac{d^2x}{dx^2}$— ikkinchi hosila, $y' = \frac{dx}{dy}$ — birinchi hosila, λ esa yechimning xarakterini belgilaydigan parametrdir. Belgilangan soha ochiq interval sifatida -1 < x < 1 shaklida berilgan.

Ushbu tenglamaga chegara shartlari qo‘yiladi, ya’ni y(x) funksiyasi interval chegaralariga yaqinlashganda, ya’ni $x \to -1$ va $x \to 1$ da cheklangan bo‘lishi talab qilinadi.

Tenglamani tahlil qilish va yechish usulini tanlash. Ushbu tenglama o‘zgaruvchan koeffitsientlarga ega bo‘lgan ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamadir. y'' oldidagi koeffitsient $1 - x^2$ bo‘lib, u $x = \pm 1$ da nolga aylanadi, bu esa ushbu nuqtalarni maxsus (singulyar) nuqtalar qiladi. O‘zgaruvchan koeffitsientlar tufayli doimiy koeffitsientli tenglamalar uchun xos bo‘lgan standart usullar qo‘llanilmaydi. Buning o‘rniga yechimni darajali qator shaklida izlash mantiqiy[2].

Yechimni darajali qator shaklida izlash. Yechim quyidagi shaklda bo‘lishini faraz qilamiz:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

bu yerda a_k— qator koeffitsientlari. Tenglama bilan ishlash uchun ushbu qatorning hosilalarini hisoblaymiz:

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2},$$

Ushbu ifodalarni asl tenglamaga qo‘yib:

$$(1 - x^2) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - x \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

Ayrim algebraik amallardan so‘ng va x ning darajalariga ko‘ra taqqoslash natijasida quyidagi rekurrent munosabatga kelamiz:

$$a_{k+2} = \frac{k^2 - \lambda}{(k+1)(k+2)} a_k \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

Polinomial yechimlarni aniqlash va Chebishev polinomlari bilan bog‘liqligi. Yechim polinom bo‘lishi uchun qator uzilishi kerak, ya’ni $a_{k+2} = 0$ bo‘lishi kerak. Bu holat quyidagi shartda sodir bo‘ladi:

$$k^2 - \lambda = 0,$$

$$\lambda = k^2.$$

Chunki *k* butun manfiy bo‘lmagan son ($k = 0, 1, 2, \ldots$), $\lambda = n^2$ deb belgilaymiz, bu yerda *n* biror butun son. Shunda $k = n$ bo‘lganda $a_{n+2} = 0$ bo‘ladi va undan keyingi barcha koeffitsientlar ham nolga aylanadi. Bu qatorning uzilishini, *y(x)* esa *n* darajali polinomga aylanishini anglatadi.

Chebishev polinomlari bilan bog‘liqlikni aniq ko‘rish uchun *n* ning bir nechta qiymatlarini ko‘rib chiqamiz. Birinchi turdagi Chebishev polinomlari $T_n(x)$ rekurrent tarzda belgilanadi:

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x, \qquad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x),$$

va $\lambda = n^2$ da Chebishev tenglamasini qanoatlantiradi.

Misollar:

- λ = 0 (n = 0) uchun:
- $a_2 = -\frac{0 \cdot a_0}{2} = 0, \quad a_4 = 0, \quad a_6 = 0, \ldots,$

• $y(x) = a_0$.

bu $T_0(x) = 1$ ga doimiygacha mos keladi.

• λ = 1 (n = 1) uchun $a_2 = -\frac{1 \cdot a_0}{2} = 0, \quad a_3 - \frac{(1-1) \cdot a_1}{6} = 0, \quad a_4 = 0, \dots,$

va boshlang‘ich shartlarga ko‘ra $a_0 = 0,\ a_1 = 1$ tanlansa, *y(x)* = *x* bo‘ladi, bu $T_n(x)$ ga mos keladi.

Chebishev polinomlari $T_n(x)$ $[-1, 1]$ da belgilangan va polinom bo‘lgani uchun cheklangan. Ularning chegaradagi qiymatlari:

$$T_n(1) = 1, T_n(-1) = (-1)^n,$$

bu chekli qiymatlar bo‘lib, $x \to \pm 1$ da cheklanganlik talabini qanoatlantiradi.

Natijalar. Darajali qator usuli masalani koeffitsientlarni belgilovchi rekurrent bog‘lanishga keltirib chiqardi. $\lambda = n^2$ da qatorning uzilishi sharti polinomial yechimlar faqat diskret λ qiymatlari uchun paydo bo‘lishini ko‘rsatdi va bu yechimlar birinchi turdagi Chebishev polinomlari ekanligini aniqladi.

Yechimning yakuniy natijasi: $\lambda = n^2$uchun, bu yerda *n = 0, 1, 2,...*, chegara shartlarini hisobga olgan holda differensial tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha yoziladi:

$$y(x) = c_1 T_n(x),$$

bu yerda c_1 ixtiyoriy doimiy, $T_n(x)$esa *n* darajali birinchi turdagi Chebishev polinomidir.

Adabiyotlar ro‘yxati

1.Abramowitz, M., Stegun, I. A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Dover Publications, New York. 1964.

2.Boyd, J. P. Chebyshev and Fourier Spectral Methods. Dover Publications, Mineola, NY. 2001.

3.Trefethen, L. N. Spectral Methods in MATLAB. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia. 2000.

4.Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., Zang, T. A. “Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains”. Springer, 2006.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ВЕТРА В АТМОСФЕРЕ

Эшбоева Нодира Фахриддиновна

базовый докторант НИИ развития цифровых технологий и искусственного нтеллекта

nodiraeshboeva1@gmail.com

Аннотация. В работе представлено численное моделирование трехмерного поля скорости ветра в атмосфере на основе уравнений Навье–Стокса. Разработан устойчивый алгоритм решения задачи гидродинамики с использованием неявной разностной схемы и аппроксимации высокого порядка. Модель учитывает пространственно-временную изменчивость скорости воздушных масс в направлениях u, v и w, что позволяет более точно описывать процессы переноса загрязняющих веществ в атмосфере.

Ключевые слова: модель, скорости, направления ветра, уравнения Навье-Стокса, метод конечно-разностных, аппроксимация.

MODELING THE SPATIAL DISTRIBUTION OF WIND SPEED IN THE ATMOSPHERE